Решения задач рейтингового тестирования.

1. *Вариант 1.* $\log_{27} 81 = \log_{3^3} 3^4 = \frac{4}{3}$.

   Вариант 2. $\log_{16} 128 = \log_{2^4} 2^7 = \frac{7}{4}$.

2. *Вариант 1.* $36288 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 7$. Нужное количество 3 набирается в 9! (в множителях $3, 6, 9$). Там же содержится даже больше, чем нужно 2 (в множителях $2, 4, 6, 8$). И конечно 9! делится на 7. Таким образом 9! делится на 36288.

   Вариант 2. $51840 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$. Нужное количество 2 набирается в 9! (в множителях $2, 4, 6, 8$). Там же содержится нужное количество 3 (в множителях $3, 6, 9$). И конечно 9! делится на 5. Таким образом 9! делится на 51840.

3. *Вариант 1.* $2012 = 5 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 3 = (5603)_7$

   Вариант 2. $2012 = 2 \cdot 9^3 + 6 \cdot 9^2 + 7 \cdot 9 + 5 = (2675)_9$

4. *Вариант 1.* Количество k-разрядных чисел, не содержащих цифру 7 равно $8 \cdot 9^{k-1}$ (первая цифра не должна быть 0 или 7, в остальных позициях не должно быть 7). Общее количество чисел от 1 до 999999, не содержащих цифру 7 будет $8 \cdot (1 + 9 + 9^2 + \ldots + 9^5) = 9^6 - 1 = 531440$, то есть больше половины.

   Вариант 2. Количество k-разрядных чисел, не содержащих цифру 0 равно 9^k (в каждой позиции не должно быть 0). Общее количество чисел от 1 до 999999, не содержащих цифру 7 будет $9 + 9^2 + \ldots + 9^6 = \frac{9}{8}(9^6 - 1) = 597870$, то есть больше половины.

5. Снаряд, выпущенный под углом α через время t будет иметь координаты $X = v \cdot \cos\alpha \cdot t$, $Y = v \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$. Снаряд достигнет плоскости мишени через время $t = \frac{x}{v \cdot \cos\alpha}$ на высоте $Y = x \cdot \tan\alpha - g \cdot x^2 \cdot \frac{1+\tan^2\alpha}{2v^2}$. Уравнения $Y = y$ и $Y = y + h$ - квадратные уравнения относительно $\tan\alpha$. Если первое из них не имеет решений, то второе также не имеет решений, и в мишеть нельзя попасть ни при каком угле α. Пусть первое уравнение имеет решения $u_{1,1} \leq u_{1,2}$, а второе уравнение решений не имеет. Тогда попадание в мишень имеет место при угле α в переделах $\arctan u_{1,1} \leq \alpha \leq \arctan u_{1,2}$. Если же второе уравнение имеет решения $u_{2,1} \leq u_{2,2}$, то снаряд попадает в мишеть, если угол α удовлетворяет одному из условий решение $\arctan u_{1,1} \leq \alpha \leq \arctan u_{2,1}$ или $\arctan u_{2,2} \leq \alpha \leq \arctan u_{1,2}$

6. *Вариант 1.* На первом шаге будет выкинут 1 квадрат площадью $1/9$, на втором шаге — 4 квадрата площадью $(1/9)^2$ каждый, на i-ом шаге будет выкинуто 4^{i-1} квадратов площадью $(1/9)^i$ каждый. Таким образом всего будут выкинуты квадраты общей площадью $1/9 + 4/9^2 + \ldots + 4^{i-1}/9^i + \ldots = 1/5$, и оставшаяся часть будет равна $4/5$.

   Вариант 2. На первом шаге будет выкинуто 3 треугольника площадью $1/9$, на втором шаге — 3^2 треугольников площадью $(1/9)^2$ каждый, на i-ом шаге будет выкинуто 3^i треугольников площадью $(1/9)^i$ каждый. Таким образом всего будут выкинуты квадраты общей площадью $1/3 + 1/3^2 + \ldots + 1/3^i + \ldots = 1/2$, и оставшаяся часть будет равна $1/2$.

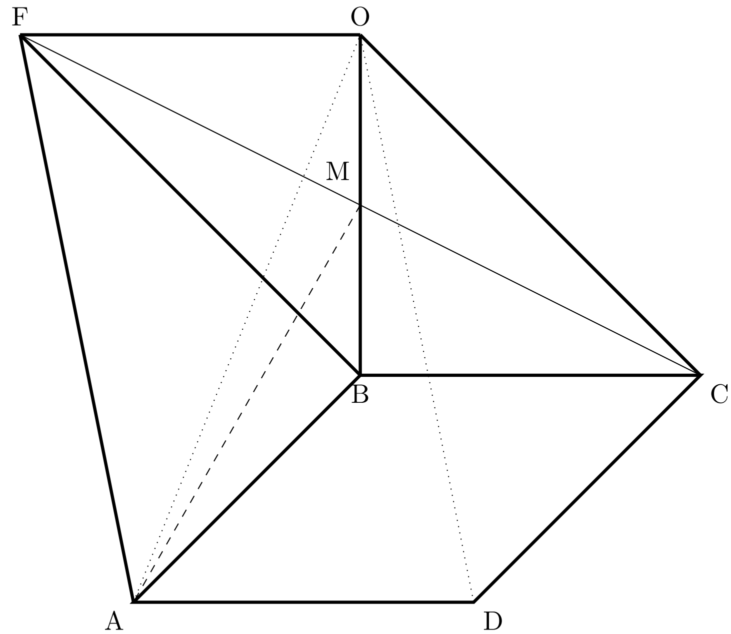
7. *Вариант 1.* Положим 998 чисел равными 1, а оставшиеся 2 числа обозначим через x и y. Равенство суммы и произведения даёт $998 + x + y = x \cdot y$ или $y = \frac{998+x}{x-1}$. Это уравнение имеет по меньшей мере два решения: $x = 2, y = 1000$ и $x = 4, y = 334$.

   Вариант 2. Положим 698 чисел равными 1, а оставшиеся 2 числа обозначим через x и y. Равенство суммы и произведения даёт $698 + x + y = x \cdot y$ или $y = \frac{698+x}{x-1}$. Это уравнение имеет по меньшей мере два решения: $x = 2, y = 700$ и $x = 4, y = 234$.

8. Пирамида $ABCDO$ и пирамида $ABFO$ сложены по грани ABO. M - середина ребра BO. Тогда $CM \perp BO$, $FM \perp BO$, $AM \perp BO$. Отсюда получаем, что двугранный угол между гранями FOB и COB равен сумме углов $\angle AMC$ и $\angle AMF$. Вычислим их по теореме косинусов.

   Из $\triangle AMF : AF^2 = AM^2 + FM^2 - 2 \cdot AM \cdot FM \cdot \cos\angle AMF$. Подставляя соответствующие длины ребер получаем $1 = (\sqrt{3}/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 - 2(\sqrt{3}/2)(\sqrt{3}/2)\cos\angle AMF$. Отсюда $\cos\angle AMF = 1/3$.

   Из $\triangle AMC : AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2 \cdot AM \cdot MC \cdot \cos\angle AMCF$. Подставляя соответствующие длины ребер получаем $(\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3}/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 - 2(\sqrt{3}/2)(\sqrt{3}/2)\cos\angle AMC$. Отсюда $\cos\angle AMC = -1/3$.



Откуда $\angle AMF + \angle AMC = \pi$. Следовательно грани FOB и COB лежат в одной плоскости и сливаются в одну грань — ромб $FOCB$.

Аналогично, грани FOA и DOA сливаются в одну грань — ромб $FODA$.

Таким образом в результирующем многограннике всего пять граней: квадрат $ABCD$, два треугольника DOC и AFB и два ромба $FOCB$ и $FODA$.

9. Пусть уже сделано k разрезов. Рассмотрим $k+1$ разрез. Пусть он проходит через точку пересечения двух уже проведённых разрезов, точку A. Заметим, что в этом случае можно отклонить $(k+1)$-й разрез так, чтобы он не проходил через точку A. Возможно, он также перестанет проходить через другие точки пересечения уже проведённых разрезов. При этом количество кусков, на которые будет разрезана пицца, лишь увеличится.

   Таким образом, имеет смысл рассматирвать лишь разрезы, которые не проходят через точки пересечения уже проведённых разрезов. Пройдём вдоль такого разреза от края пиццы до другого края пиццы. Разрез начинается с некоторого куска, доходит до его границы, разделяя кусок на два, и переходит в следующуй кусок. Он пройдёт на единицу больше кусков, чем число прямых он пересёк. Таким образом, если он пересёк l уже проведенных разрезов, то к конфигурации кусков добавилось $(l+1)$ кусков.

   Заметим, что всегда можно провести такой разрез, который бы пересёк все предыдущие и не прошёл бы через точку пересечения двух построенных ранее разрезов. Отсюда максимальное число порождаемых новым разрезом кусков не зависит от предыдущей конфигурации, а лишь зависит от порядкового номера этого разреза.

   Тогда в рассматириваемом случае искомое число будет равно $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 1 + 7 \cdot 8/2 = 29$ кусков (в начале было проведено 0 разрезов и имелся один кусок).

10. Площадь правильного n-угольника с длиной стороны l равна $(n \cdot l^2/4)/(\tan \frac{\pi}{n})$. Поскольку для сравниваемых многоугольников множители $n \cdot l/4$ одинаковы, необходимо сравнить $10/\tan \frac{\pi}{5}$ и $5/\tan \frac{\pi}{10}$. Используя формулу для тангенса двойного угла $\tan 2\alpha = (1-\tan^2\alpha)/2\tan\alpha$, получим $10/\tan \frac{\pi}{5} = 5\cdot(1-\tan^2 \frac{\pi}{10})/\tan \frac{\pi}{10} < 5/\tan \frac{\pi}{10}$.